ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 31, No. 2, 1978

UNE METHODE ITERATIVE DE RESOLUTION D'UNE INEQUATION VARIATIONNELLE

PAR

P. L. LIONS

ABSTRACT

We prove the convergence of an iterative method to a solution of a variational inequality.

I. Introduction

Dans ce qui suit H désigne un espace de Hilbert réel, A un opérateur maximal monotone sur H, C un convexe fermé non vide de H.

On s'intéresse à l'inéquation: trouver u vérifiant

$$\text{(I.V.1)} \qquad \begin{cases} u \in C \cap D(A), & v \in Au, \\ \forall x \in C, & (v, x - u) \geqq 0 \end{cases}$$

On remarque que (I.V.1) peut s'écrire:

$$\text{(1)} \qquad u \in C \cap D(A), \qquad 0 \in Au + \partial I_C(u).$$

Dans ce qui suit on étudie la convergence de moyennes de l'itération:

$$\text{(2)} \qquad x_{n+1} = P_C(I + \lambda_n A)^{-1} x_n \qquad (\text{où } \lambda_n > 0),$$

et P_C désigne la projection hilbertienne sur C.

Dans le paragraphe II on montre que $y_n = \Sigma_1^n \lambda_i x_i / \Sigma_1^n \lambda_i$ converge faiblement dans H vers u solution de (I.V.1), si $\Sigma_1^n \lambda_i \to +\infty$.

Dans le paragraphe III on considère le cas particulier où $C = H$ et A est impair, on montre alors que la convergence est forte.

REMARQUES.

1) L'itération (2) est très proche de celle considérée par R. E. Bruck dans [3], [4] et [5]:

Received June 14, 1978

$$(2') \qquad x_{n+1} = P_C(I - \lambda_n A)x_n;$$

la différence entre (2) et (2′) réside dans le fait que (2) est un schéma implicite et (2′) explicite.

2) Dans le cas particulier où $C = H$, l'itération (2) se réduit à l'itération de résolvantes de A étudiée par H. Brezis et P. L. Lions [2], les résultats qui suivent apportent donc des renseignements complémentaires sur cette itération.

II. Convergence faible des moyennes

Dans cette section nous ferons l'hypothèse essentielle que (I.V.1) est équivalent à:

$$(\mathrm{I.V.2}) \qquad \begin{cases} u \in C, \\ \forall x \in C \cap D(A), \quad \forall y \in Ax, \quad (y, x - u) \geqq 0. \end{cases}$$

Remarquons que si u est solution de (I.V.1), u est solution de (I.V.2) et que la réciproque est vraie si on suppose (par exemple) que $A + \partial I_C$ est *maximal monotone*, ou que A est défini, hemicontinu sur C.

On note X l'ensemble (eventuellement vide) des solutions d'(I.V.1) (ou (I.V.2)).

THÉORÈME II.1. *On suppose X non vide et on se donne $(\lambda_n) \in l^2$, $(\lambda_n) \notin l^1$ (et $\lambda_n \geqq 0$). Soient $x_1 \in C$ et (x_n) la suite déterminée par* (2); *alors en posant*:

$$y_n = \left(\sum_1^n \lambda_j x_j\right)\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j\right)^{-1}$$

on a:

$$y_n \xrightarrow[w-H]{} y \in X.$$

DÉMONSTRATION. La démonstration du Théorème repose sur une extension du lemme d'Opial dûe à H. Brezis et F. E. Browder [1]:

LEMME. *Soient x_n, y_n deux suites dans H, X un sous-ensemble non vide de H, C_m l'enveloppe convexe fermée de $\bigcup_{j \geqq m}\{x_j\}$. On suppose que*:

i) $\forall u \in X, \quad |x_j - u|^2 \xrightarrow[j \to +\infty]{} p(u) < +\infty,$

ii) $\operatorname{dist}(y_k, C_m) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, *pour tout* m,

iii) *toute limite faible de sous-suite de* $\{y_n\}$ *appartient à* X.

Alors y_n converge faiblement vers un point de X. ■

Il nous suffit donc de vérifier i), ii), iii):

i) Comme $P_C(I+\lambda_n A)^{-1}$ est une contraction et que

$$u = P_C(I+\lambda_n A)^{-1}\{u+\lambda_n v\},$$

on a

$$|x_{n+1}-u|^2 \leqq |x_n - u - \lambda_n v|^2 = |x_n-u|^2 - 2\lambda_n(v, x_n-u) + \lambda_n^2|v|^2. \tag{3}$$

Donc en particulier: $|x_{n+1}-u|^2 \leqq |x_n-u|^2 + \lambda_n^2|v|^2$.

Puisque $(\lambda_n)\in l^2$, on déduit aisément i) de cette inégalité.

ii) Soit m fixé et soit $k>m$, alors nous avons

$$y_k = \left(\sum_1^k \lambda_j x_j\right)\left(\sum_1^k \lambda_j\right)^{-1} = \left(\sum_1^{m-1}\lambda_j x_j + \sum_m^k \lambda_j x_j\right)\left(\sum_1^k \lambda_j\right)^{-1}$$

donc

$$\operatorname{dist}(y_k, C_m) \leqq \left\{\sum_1^{m-1}\lambda_j|x_j| + \left(\sum_1^{m-1}\lambda_j\right)\left(\sum_m^k \lambda_j|x_j|\right)\left(\sum_m^k\lambda_j\right)^{-1}\right\}\left(\sum_1^k\lambda_j\right)^{-1}$$

mais $\{x_n\}$ est bornée d'après i) et $(\lambda_n)\notin l^1$ par l'hypothèse, ii) découle donc de l'inégalité précédente.

iii) Montrons que toute limite faible de sous-suite de $\{y_n\}$ appartient à X: Pour cela soient $\xi\in D(A)$, $\eta\in A\xi$, de la même manière que pour (3), on obtient

$$|x_{n+1}-\xi|^2 \leqq |x_n-\xi|^2 + \lambda_n^2|\eta|^2 - 2\lambda_n(\eta, x_n-\xi); \tag{3'}$$

d'où il vient:

$$2(\eta, y_n-\xi) \leqq \frac{|x_0-\xi|^2}{\sum_1^n \lambda_j} + |\eta|^2\frac{\sum_1^n \lambda_j^2}{\sum_1^n \lambda_j}.$$

Mais alors si $y_{n'} \xrightarrow[w-K]{} y$ alors bien sûr $y\in C$ et de l'inégalité ci-dessus on déduit

$$(\eta, y-\xi)\leqq 0, \qquad \forall\xi\in C\cap D(A), \qquad \forall\eta\in A\xi;$$

c'est à dire y est solution de (I.V.2.): $y\in X$.

Remarque II.1. Dans [4] R. E. Bruck établit le résultat suivant: on suppose que l'ensemble des solutions d'(I.V.2) est non vide, que $(\lambda_n)\in l^1$, que $\Sigma\lambda_n^2|v_n|^2 < +\infty$ où $\lambda_n\geqq 0$ et $x_{n+1} = P_C\{x_n-\lambda_n v_n\}$ avec $v_n\in Ax_n$ alors $y_n \xrightarrow[w-H]{} y$ solution de (I.V.2).

Cependant l'hypothèse $\Sigma \lambda_n^2 |v_n|^2 < +\infty$ est délicate à vérifier: essentiellement il faut supposer: C borné, A borné sur C et $(\lambda_n) \in l^2$.

La méthode de démonstration précédente permet également d'établir le résultat cité ci-dessus de R. E. Bruck de façon plus rapide. ∎

REMARQUE II.2. Dans le cas particulier où $C = H$, on a bien sûr l'équivalence de (I.V.1) et (I.V.2), et $X = A^{-1}0$. L'itération considérée est:

$$x_{n+1} = (I + \lambda_n A)^{-1} x_n.$$

Alors d'après H. Brezis et P. L. Lions [2], on sait que:

$$\text{si} \quad \sum \lambda_n < +\infty \quad \text{alors} \quad x_n \to x \in D(A),$$

$$\text{si} \quad \sum \lambda_n^2 = +\infty \quad \text{alors} \quad x_n \xrightarrow[W-H]{} x \in A^{-1}0,$$

en combinant ces résultats avec le résultat précédent on voit que pour toute suite (λ_n) y_n converge faiblement vers y et que si $\Sigma \lambda_n = +\infty$ alors $y \in A^{-1}0$. ∎

III. Convergence forte dans le cas impair

On suppose ici que $C = H$.

THÉORÈME III.1. *Soit A maximal monotone impair, alors si* $\Sigma_1^\infty \lambda_n = +\infty$ $(\lambda_n \geqq 0)$,

$$z_n = \left(\sum_1^{n-1} \lambda_j x_{j+1}\right)\left(\sum_1^{n-1} \lambda_j\right)^{-1} \xrightarrow[W-H]{} z \in A^{-1}0.$$

DÉMONSTRATION. La démonstration repose sur une technique de R. E. Bruck [5] et plus exactement sur le lemme suivant (démontré en [5]):

LEMME. *Soient (x_n) une suite dans H, (λ_n) une suite de R_+, on pose $z_n = \Sigma_1^{n-1} \lambda_i x_{i+1} / \Sigma_1^{n-1} \lambda_i$. Alors si $|x_n|$ converge, si $(\lambda_n) \notin l^1$ et si*

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} |(z_n, x_k - x_n)| = 0, \tag{4}$$

alors z_n converge dans H. ∎

Puisque $0 \in A^{-1}0$, on sait d'après i) dans la démonstration du Théorème II.1 que $|x_n|$ converge (en fait $|x_n| \downarrow$). Il nous suffit donc, pour prouver le résultat, de vérifier la condition (4).

Pour cela, on note

$$w_{n+1} = \frac{x_n - x_{n+1}}{\lambda_n} \in Ax_{n+1};$$

en appliquant le fait que A est impair, on obtient:

$$|(w_i, x_j) + (w_j, x_i)| \leqq [(w_i, x_i) + (w_j, x_j)].$$

En multipliant cette inégalité par $2\lambda_{i-1}\lambda_{j-1}$, il vient

$$2|(\lambda_{j-1}x_j, x_{i-1} - x_i) + (x_{j-1} - x_j, \lambda_{i-1}x_i)| \leqq$$
$$\lambda_{j-1}\{|x_{i-1}|^2 - |x_i|^2\} + \lambda_{i-1}\{|x_{j-1}|^2 - |x_j|^2\}.$$

Enfin, en sommant cette inégalité pour $k < i, j \leqq n$, on obtient

$$2\left|\left(\left\{\sum_{k+1}^{n} \lambda_{i-1}x_i\right)\left\{\sum_{k+1}^{n} \lambda_{i-1}\right\}^{-1}, x_k - x_n\right)\right| \leqq |x_k|^2 - |x_n|^2. \tag{5}$$

De plus pour k fixé:

$$\lim_n z_n - \left(\sum_{k+1}^{n} \lambda_{i-1}x_i\right)\left(\sum_{k+1}^{n} \lambda_{i-1}\right)^{-1} = 0.$$

Donc de (5), on déduit:

$$\limsup_n |(z_n, x_k - x_n)| \leqq \{|x_k|^2 - \lim |x_n|^2\},$$

ce qui entraine évidemment (4). ■

REMARQUE III.1. Dans [5], R. E. Bruck montre le résultat de convergence pour l'itétation (2′) sous la condition A impair et des hypothèses du type de celles indiquées dans la Remarque II.1. ■

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Brezis and F. E. Browder, *Non-linear ergodic theorems*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 959–961.

2. H. Brezis et P. L. Lions, *Produits infinis de résolvantes*, Israel J. Math. **29** (1978), 329–345.

3. R. E. Bruck, *An iterative solution of a variational inequality for certain monotone operators in Hilbert space*, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 890–892 (voir également le Corrigendum **82** (1976)).

4. R. E. Bruck, *Weak convergence of an ergodic iteration*, preprint.

5. R. E. Bruck, *On the strong convergence of an iteration for the solution of operator equations involving monotone operators in Hilbert space*, preprint.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE
45 RUE D'ULM
PARIS 75005, FRANCE